

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-3-224-229>

УДК 539.3

## К решению контактной задачи для прямоугольной пластинки на упругом полупространстве

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков<sup>1)</sup><sup>1)</sup>ГП «Институт жилища – НИПТИС имени Атаева С. С.» (Минск, Республика Беларусь)© Белорусский национальный технический университет, 2020  
Belarusian National Technical University, 2020

**Реферат.** До настоящего времени отсутствует точное решение контактной задачи для прямоугольной пластинки на упругом основании с распределительными свойствами. Практическими аналогами такой конструкции являются широко применяемые в строительстве плитные фундаменты. Многие ученые решали эту задачу различными способами. Методы конечных разностей, Б. Н. Жемочкина и степенных рядов не выделяют особенность в контактных напряжениях у краев плиты. Автор статьи получил разложение решения Буссинеска для определения перемещений поверхности упругого полупространства в виде двойного ряда по полиномам Чебышева первого рода в прямоугольной области. Впервые такое представление для симметричной части решения Буссинеска получил В. И. Сеймов и применил это разложение для исследования симметричных колебаний прямоугольного штампа с учетом инерционных свойств полупространства. Используя данное разложение, автор приводит решение задачи о динамических перемещениях прямоугольной пластинки, лежащей на упругом полупространстве, под действием произвольно приложенной сосредоточенной силы. При этом искомые перемещения задавались в виде двойного ряда по полиномам Чебышева первого рода, контактные напряжения – в виде двойного ряда по полиномам Чебышева первого рода с весом. В интегральном уравнении контактной задачи выполняется интегрирование по прямоугольной области с учетом ортогональности полиномов Чебышева. В полученном выражении приравниваются коэффициенты при одинаковых произведениях полиномов Чебышева. Получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая решается методом усиления. Таким образом находятся искомые коэффициенты в разложении для контактных напряжений.

**Ключевые слова:** упругое полупространство, контактная задача, прямоугольная пластинка

**Для цитирования:** Босаков, С. В. К решению контактной задачи для прямоугольной пластинки на упругом полупространстве / С. В. Босаков // *Наука и техника*. 2020. Т. 19, № 3. С. 224–229. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-3-224-229>

## To Solution of Contact Problem for Rectangular Plate on Elastic Half-Space

S. V. Bosakov<sup>1)</sup><sup>1)</sup>UE “Institute of Housing – NIPTIS named after Ataev S. S.” (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** Until the present time there is no exact solution to the contact problem for a rectangular plate on an elastic base with distribution properties. Practical analogues of this design are slab foundations widely used in construction. A lot of scientists have solved this problem in various ways. The methods of finite differences, B. N. Zhemochkin and power series do not distinguish a specific feature in contact stresses at the edges of the plate. The author of the paper has obtained an expansion of the Boussinesq solution for determining displacements of the elastic half-space surface in the form of a double series according to the Chebyshev polynomials of the first kind in a rectangular region. For the first time, such a representation for the symmetric part of the Boussinesq solution was obtained by V. I. Seimov and it has been applied to study symmetric vibrations of a rectangular stamp, taking into account inertial properties of the half-space. Using this expansion, the author gives a solution to the problem for a rectangular plate lying on an elastic half-space under the action of an arbitrarily applied concentrated force. In this case, the required displacements are specified in the form of a double row in the Chebyshev polynomials of the first kind. Contact stresses are also specified in the form of a double row according to the Chebyshev polynomials of the first kind with weight. In the integral equation of the contact problem integration over a rectangular region is performed while taking into account the orthogonality of the Chebyshev polynomials. In the resulting expression the coefficients are equal for the same products of the Chebyshev polynomials. The result is an infinite system of linear algebraic equations, which is solved by the amplification method. Thus the sought coefficients are found in the expansion for contact stresses.

**Keywords:** elastic half-space, contact problem, rectangular plate

**For citation:** Bosakov S. V. (2020) To Solution of Contact Problem for Rectangular Plate on Elastic Half-Space. *Science and Technique*. 19 (3), 224–229. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-3-224-229> (in Russian)

### Адрес для переписки

Босаков Сергей Викторович  
ГП «Институт жилища – НИПТИС имени Атаева С. С.»  
ул. Ф. Скорины, 15б,  
220114, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 265-97-28  
[up-niptis@rambler.ru](mailto:up-niptis@rambler.ru)

### Address for correspondence

Bosakov Siarhei V.  
UE “Institute of Housing – NIPTIS named after Ataev S. S.”  
15b, F. Skoriny str.,  
220114, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 265-97-28  
[up-niptis@rambler.ru](mailto:up-niptis@rambler.ru)

## Введение

До настоящего времени отсутствует точное решение контактной задачи для прямоугольной пластинки на упругом основании с распределительными свойствами. Практическими аналогами такой конструкции являются широко применяемые в строительстве плитные фундаменты. Решение этой задачи методом степенных рядов рассмотрено М. И. Горбуновым-Посадовым [1], методом конечных разностей – В. И. Соломиным [2], С. М. Алейниковым [3], способом Б. Н. Жемочкина – в [4, 5], методом Ритца – в [6]. Особое значение имеют работы по исследованию поведения контактных напряжений в угловых точках [7, 8]. Однако методы конечных разностей, Б. Н. Жемочкина и степенных рядов не выделяют особенность в контактных напряжениях у краев плиты. Впервые представление для симметричной части решения Буссинеска получил В. И. Сеймов [9] и использовал это разложение для исследования симметричных колебаний прямоугольного штампа с учетом инерционных свойств полупространства.

## Разложение решения Буссинеска в ряд по полиномам Чебышева

Известно, что плоская деформация является частным случаем пространственной задачи, поэтому решение Фламана для упругой полуплоскости можно получить интегрированием решения Буссинеска для упругого полупространства. Также доказано, что формула перемещений границы упругой полуплоскости от действия сосредоточенной силы (решение Фламана) допускает билинейное разложение [8]

$$\ln|x-\xi| = -\ln 2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} T_m(x) T_m(\xi), \quad |x, \xi| \leq 1. \quad (1)$$

Поэтому естественно предположить, что выражение для определения вертикальных перемещений поверхности упругого полупространства

Представим [9, 10]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}} &= \int_0^{\infty} J_0(\beta \sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}) d\beta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(\beta x) J_j(\beta \xi) \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(\alpha \beta y) J_i(\alpha \beta \eta) + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{2k+j}(\beta x) J_j(\beta \xi) \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_{2k+i}(\alpha \beta y) J_i(\alpha \beta \eta). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и выполним интегрирование с учетом формул [10]

ранства от действия сосредоточенной силы (решение Буссинеска) также допускает двойное билинейное представление в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}} &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n}(\alpha) T_m(x) T_m(\xi) T_n(y) T_n(\eta), \quad (2) \\ |x, \xi| &\leq 1; |y, \eta| \leq 1; 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения из (2):

$$\begin{aligned} C_{m,n}(\alpha) &= \beta_{m,n} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_m(\xi) T_n(y) T_n(\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}} \times \\ &\times \frac{dx d\xi dy d\eta}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-\eta^2}}, \quad (3) \\ \beta_{0,0} &= \frac{1}{\pi^4}; \beta_{m,0} = \beta_{0,n} = \frac{4}{\pi^4}; \beta_{m,n} = \frac{16}{\pi^4}. \end{aligned}$$

Справедливость представления (2) можно доказать из условия симметричности ядра Буссинеска. Действительно, два функциональных ряда равны, если равны попарно одноименные члены этих рядов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}} &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n}^{i,k}(\alpha) T_m(x) T_n(y) T_i(\xi) T_k(\eta); \\ \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + \alpha^2(\eta-y)^2}} &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n}^{i,k}(\alpha) T_m(\xi) T_n(\eta) T_i(x) T_k(y). \end{aligned}$$

Это приводит к равенству, которое выполняется при условии  $m = i$  и  $n = k$ :

$$T_m(x) T_i(\xi) T_n(y) T_k(\eta) = T_m(\xi) T_i(x) T_n(\eta) T_k(y).$$

$$\int_0^1 \frac{J_\nu(xy) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} J_{\frac{\nu+m}{2}}\left(\frac{y}{2}\right) J_{\frac{\nu-m}{2}}\left(\frac{y}{2}\right). \quad (5)$$

Получим

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}} = \pi^4 \int_0^\infty \left[ \sum_{j=-\infty}^\infty J_{\frac{j+m}{2}}^2\left(\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{j-m}{2}}^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=-\infty}^\infty J_{\frac{i+n}{2}}^2\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i-n}{2}}^2\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) + 2 \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \times \right. \\ \left. \times \sum_{ji=-\infty}^\infty J_{k+\frac{j+m}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right) J_{k+\frac{j-m}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{j+m}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{j-m}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=-\infty}^\infty J_{k+\frac{i+n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{k+\frac{i-n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i+n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i-n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) \right] d\beta. \quad (6)$$

В (6) из интеграла (5) следует, что  $j$  и  $m$ ,  $i$  и  $n$  являются одновременно четными либо нечетными. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=-\infty}^\infty J_{k+\frac{i+n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{k+\frac{i-n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i+n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i-n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right). \quad (7)$$

Выполним замены [10, 11]

$$J_{k+\frac{i+n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{k+\frac{i-n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2}{\pi} (-1)^{k-n+i} \int_0^{\pi/2} \cos(2k+i)\theta J_n(\alpha\beta \cos\theta) d\theta \times \\ \times J_{\frac{i+n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i-n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos n\varphi J_i(\alpha\beta \cos\varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Найдем сумму ряда (7) при условии, что  $i$  и  $n$  являются одновременно четными. Последовательно находим:

$$\sum_{i=-\infty}^\infty (-1)^i \cos(2k+2i)\theta J_{2i}(\alpha\beta \cos\varphi) = \cos 2k\theta \sum_{i=-\infty}^\infty (-1)^i \cos 2i\theta J_{2i}(\alpha\beta \cos\varphi) = \\ = \cos 2k\theta \left[ J_0(\alpha\beta \cos\theta) + 2 \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \cos 2i\theta J_{2i}(\alpha\beta \cos\varphi) \right] = \cos 2k\theta \cos(\alpha\beta \cos\theta \cos\varphi); \quad (9) \\ \int_0^{\pi/2} \cos 2n\varphi \cos(\alpha\beta \cos\theta \cos\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} J_{2n}(\alpha\beta \cos\theta).$$

В (9) использованы разложение и сумма ряда [10], свойство ортогональности тригонометрических функций:

$$\cos(\alpha\beta \cos\theta \cos\varphi) = J_0(\alpha\beta \cos\theta) + 2 \sum_{k=1}^\infty J_{2k}(\alpha\beta \cos\theta) \cos 2k\varphi;$$

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \cos k\alpha J_{2k}(z) = \frac{1}{2} \cos\left(z \cos \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2} J_0(z).$$

Таким образом:

$$\sum_{i=-\infty}^\infty J_{k+i+n}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{k+i-n}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i+n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) J_{\frac{i-n}{2}}\left(\alpha\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2}{\pi} (-1)^{k-n} \int_0^{\pi/2} \cos 2k\theta J_{2n}^2(\alpha\beta \cos\theta) d\theta. \quad (10)$$

Последний интеграл берется подстановкой  $\cos\theta = x$  с использованием (8) [11]:

$$\frac{2}{\pi} (-1)^{k-n} \int_0^{\pi/2} \cos 2k\theta J_{2n}^2(\alpha\beta \cos\theta) d\theta = \int_0^1 \frac{T_{2k}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\pi/2} J_{2n}(\alpha\beta x \cos t) dt dx =$$

$$= \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \beta^{2k} \Gamma(k+1/2)}{2^{2k+1} k!(k-n)!(k+n)!} {}_2F_3(k+1/2, k+1/2; 2k+1, 1+k-n, 1+k+n; -\alpha^2 \beta^2), k \geq n; \quad (11)$$

$$\frac{(-1)^k \sqrt{\pi} \beta^{2n} \Gamma(n+1/2)}{2^{2n+1} n!(n-k)!(k+n)!} {}_2F_3(n+1/2, n+1/2; 2k+1, 1+n-k, 1+k+n; -\alpha^2 \beta^2), k < n.$$

Если в (7)  $i$  и  $n$  являются одновременно нечетными, то, повторяя подобную последовательность действий, получим:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} J_{k+i+n+1} \left( \alpha \frac{\beta}{2} \right) J_{k+i-n} \left( \alpha \frac{\beta}{2} \right) J_{i+n+1} \left( \alpha \frac{\beta}{2} \right) J_{i-n} \left( \alpha \frac{\beta}{2} \right) = \frac{2}{\pi} (-1)^{k-n} \int_0^{\pi/2} \cos 2k\theta J_{2n+1}^2(\alpha \beta \cos \theta) d\theta. \quad (12)$$

Теперь необходимо выполнить интегрирование по  $\beta$  в (6) при учете представлений (11) в (10) и (12). Заметим, что первый двойной ряд в (4) суммируется (10) при  $k=0$ . Чтобы получить универсальную формулу при интегрировании по  $\beta$  в (11) и (12), обозначим  $r = \min(k, m)$ ;  $s = \max(k, m)$ ;  $t = \min(k, n)$ ;  $u = \max(k, n)$ . Тогда искомый интеграл (3) выразится через  $G$ -функцию Мейера [10]

$$C_{m,n}(\alpha) = \frac{\beta_{m,n}}{\pi^2} \left\{ \frac{\alpha^{2n}}{2} G_{6,6}^{3,3} \left( \alpha^2 \middle| \begin{matrix} 1/2-n & 1/2-n & 1/2-m-n & 1/2-n & 1/2-n & 1/2+m-n \\ 0 & -n & -n & -2n & -n & -n \end{matrix} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+r+t} \alpha^{2u} G_{6,6}^{3,3} \left( \alpha^2 \middle| \begin{matrix} 1/2-u & 1/2-u & 1/2-s-u & 1/2+k+m-s-u & 1/2+|k-m|-s & 1/2+s-u \\ 0 & -u & -u & -k-n & -|k-n| & -2u \end{matrix} \right) \right\}.$$

#### Решение контактной задачи для прямоугольной пластинки

Рассмотрим прямоугольную пластинку размерами  $2a \times 2b$  на упругом полупространстве под действием внешней нагрузки. Интегральное уравнение для определения контактных напряжений между пластинкой и полупространством имеет вид

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\pi E}{1-\nu^2} w(x, y), \quad (13)$$

где  $E, \nu$  – упругие постоянные полупространства;  $p(\xi, \eta)$  – неизвестный закон распределения контактных напряжений;  $w(x, y)$  – перемещение пластинки.

Принимаем:

$$p(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}} \sqrt{1-\frac{\eta^2}{b^2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{i,k} T_i \left( \frac{\xi}{a} \right) T_k \left( \frac{\eta}{b} \right); \quad (14)$$

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} T_m \left( \frac{x}{a} \right) T_n \left( \frac{y}{b} \right),$$

где  $A_{m,n}, B_{i,k}$  – неопределенные коэффициенты.

Подставим (14) в (13) и выполним интегрирование с учетом представления (2), предвари-

тельно перейдя к безразмерным координатам и приняв  $\alpha = b/a$ . В результате получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{m,n} C_{m,n}(\alpha) B_{m,n} T_m(x) T_n(y) =$$

$$= \frac{\pi E}{(1-\nu^2)b} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{j,l} T_j(x) T_l(y), \quad (15)$$

$$\varepsilon_{0,0} = \pi^2; \varepsilon_{m,0} = \varepsilon_{0,m} = \frac{\pi^2}{2}; \varepsilon_{m,n} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Приравнявая в (15) коэффициенты при одинаковых произведениях полиномов Чебышева, получаем зависимости:

$$A_{0,0} = \frac{(1-\nu^2)\pi b}{E} C_{0,0}(\alpha) B_{0,0};$$

$$A_{0,1} = \frac{(1-\nu^2)\pi b}{2E} C_{0,1}(\alpha) B_{0,1};$$

$$A_{1,0} = \frac{(1-\nu^2)\pi b}{2E} C_{1,0}(\alpha) B_{1,0};$$

$$\dots$$

$$A_{m,n} = \frac{(1-\nu^2)\pi b}{4E} C_{m,n}(\alpha) B_{m,n}. \quad (16)$$

С другой стороны, из уравнений равновесия всей пластинки следует:

$$B_{0,0} = \frac{R}{\pi^2 ab}; B_{0,1} = \frac{2M_y}{\pi^2 a^2 b}; B_{1,0} = \frac{2M_x}{\pi^2 ab^2}, \quad (17)$$

где  $R$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  – равнодействующая внешней нагрузки и моменты равнодействующей относительно осей координат.

Из (16) и (17) можно получить явные выражения для линейного и угловых перемещений прямоугольного штампа на упругом полупространстве:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{R(1-\nu^2)}{\pi E a} C_{0,0}(\alpha); \\ \varphi_y &= \frac{2M_x(1-\nu^2)}{\pi E ab} C_{0,1}(\alpha); \\ \varphi_x &= \frac{2M_y(1-\nu^2)}{\pi E ab} C_{1,0}(\alpha). \end{aligned} \quad (18)$$

В табл. 1 приведены величины перемещений прямоугольного штампа на упругом полупространстве по данным других авторов и предлагаемой методики.

Таблица 1

$\alpha = \frac{b}{a}$	Перемещение $\frac{Ea}{R(1-\nu^2)}$			Угол поворота $\frac{Eab}{M_y(1-\nu^2)}$	
	По [1]	По [7]	По автору	По [1]	По автору
1,0	0,460	0,4265	0,438	0,570	0,520
0,5	0,318	–	0,314	0,644	0,611
0,2	0,181	–	0,181	0,695	0,729

Для пластинки конечной жесткости решение получим методом Ритца [12]. Энергия изгиба прямоугольной пластинки выразится через функцию ее перемещений (14) формулой

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \left[ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-\nu) \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - \left( \frac{d^2 w}{dxdy} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $D$ ,  $\nu$  – цилиндрическая жесткость пластинки и коэффициент Пуассона материала пластинки.

Работа реактивных напряжений на перемещениях пластинки получится в таком виде:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b p(x, y) w(x, y) dx dy = \\ &= \frac{\pi^2}{2} ab \left[ A_{0,0} B_{0,0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (A_{0,i} B_{0,i} + A_{i,0} B_{i,0}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,i} B_{i,i} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

Работа внешней нагрузки

$$\Pi = - \int_{-a}^a \int_{-b}^b q(x, y) w(x, y) dx dy. \quad (21)$$

Составим выражение для полной энергии изгибаемой пластинки на упругом основании и действующей на нее внешней нагрузки

$$\Omega = U + \Psi + \Pi. \quad (22)$$

Согласно методу Ритца, продифференцируем (22) по каждому из неизвестных коэффициентов  $A_{m,n}$  и полученные результаты приравняем нулю, предварительно подставив соотношение связи (16) между коэффициентами  $A_{m,n}$  и  $B_{m,n}$ . Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $A_{m,n}$ , порядок которой определяется количеством членов ряда (14). Решение системы дает возможность определить перемещения пластинки и, следовательно, усилия и распределение контактных напряжений в ней (16).

**Пример.** Рассмотрим прямоугольную пластинку на упругом основании под действием сосредоточенной силы  $R = 100$  кН, приложенной в точке с координатами  $x_p = a/2$ ;  $y_p = b/2$ ;  $D = 2000$  кН·м;  $\nu = 0,2$ ;  $a = 2$  м;  $b = 3$  м;  $E = 6670$  кН/м<sup>2</sup>.

$$\text{Задаемся } w(x, y) = \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 A_{m,n} T_m\left(\frac{x}{a}\right) T_n\left(\frac{y}{b}\right).$$

Опуская промежуточные результаты, получим:

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= 0,00276 \text{ м}; \quad A_{0,1} = 0,00176 \text{ м}; \quad A_{0,2} = -0,00084 \text{ м}; \\ A_{1,0} &= 0,00144 \text{ м}; \quad A_{1,1} = 0,00138 \text{ м}; \quad A_{1,2} = -0,00069 \text{ м}; \\ A_{2,0} &= -0,00041 \text{ м}; \quad A_{2,1} = -0,00048 \text{ м}; \quad A_{2,2} = 0,00012 \text{ м}. \end{aligned}$$

На рис. 1 показаны вертикальные перемещения поверхности пластинки от действия сосредоточенной силы.

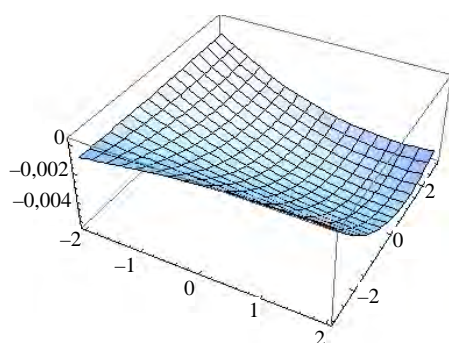


Рис. 1. Вертикальные перемещения поверхности прямоугольной пластинки от действия сосредоточенной силы

Fig. 1. Vertical displacements of rectangular plate surface due to action of concentrated force

## ВЫВОДЫ

1. Матрица коэффициентов при неизвестных разрешающей системы уравнений, полученная при дифференцировании (22), является редко заполненной диагональной и может быть решена в общем виде для не слишком большого числа неизвестных. Это позволяет строить поверхности влияния вертикальных перемещений точек пластинки и, как следствие [13], находить перемещения пластинки от любой внешней нагрузки.

2. При расчете пластинки на иной модели упругого основания, отличной от полупространства, следует представить вертикальные перемещения границы упругого основания от действия сосредоточенной силы в виде решения Буссинеска и ряда по полиномам Чебышева [8]

$$K(x, \xi, y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \alpha^2(y - \eta)^2}} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_{m,n}(\alpha) T_m(x) T_m(\xi) T_n(y) T_n(\eta)$$

и использовать вышеописанную процедуру для расчета прямоугольной пластинки на упругом полупространстве.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
2. Соломин, В. И. Расчет прямоугольных плит на упругом полупространстве методом сеток / В. И. Соломин // Строительная механика и расчет сооружений. 1960. № 6. С. 12–17.
3. Алейников, С. М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований / С. М. Алейников. М.: Изд-во АСВ, 2000. 754 с.
4. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. М.: Стройиздат, 1962. 262 с.

5. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
6. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. Брест, 2006. 108 с.
7. Бородачев, Н. М. О вдавливании штампа с плоским квадратным основанием в упругое полупространство / Н. М. Бородачев // Прикладная механика. 1999. Т. 35, № 10. С. 21–26.
8. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
9. Сеймов, В. М. Динамические контактные задачи / В. М. Сеймов. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
10. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматлит, 1963. 1097 с.
11. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1983. 752 с.
12. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
13. Ржаницын, А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.

Поступила 18.11.2019

Подписана в печать 28.01.2020

Опубликована онлайн 29.05.2020

## REFERENCES

1. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. Moscow, Stroyizdat Publ. 679 (in Russian).
2. Solomin V. I. (1960) Calculation of Rectangular Plates on Elastic Half-Space by Grid Method. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzhenii = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (6), 12–17 (in Russian).
3. Aleinikov S. M. (2000) *Boundary Element Method in Contact Problems for Elastic Spatial-and-Nonhomogeneous Bases*. Moscow, ASV Publ. 754 (in Russian).
4. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods of Calculation for Beams and Slabs on Elastic Foundation*. Moscow, Stroyizdat Publ. 262 (in Russian).
5. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
6. Bosakov S. V. (2006) *Ritz's Method in the Contact Problems of the Theory of Elasticity*. Brest, Brest State Technical University. 108 (in Russian).
7. Borodachev N. M. (1999) Impression of a Punch with a Flat Square Base into an Elastic Half-Space. *International Applied Mechanics*, 35 (10), 989–994. <https://doi.org/10.1007/bf02682309>.
8. Galin L. A. (ed.) (1976) *Developments of the Theory of Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 493 (in Russian).
9. Seimov V. M. (1976) *Dynamic Contact Tasks*. Kiev, Naukova Dumka. 283 (in Russian).
10. Gradsteyn I. S., Ryzhik I. M. (1963) *Table of Integrals, Series and Products*. Moscow, Fizmatlit Publ. 1097 (in Russian).
11. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. (1983) *Integrals and Series. Special Functions*. Moscow, Nauka Publ. 752 (in Russian).
12. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *The Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
13. Rzhantsyn A. R. (1991) *Structural Mechanics*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).

Received: 18.11.2019

Accepted: 28.01.2020

Published online: 29.05.2020